

求解轴对称场的有限元-新型等效源两种耦合新算法

闫照文¹,李朗如¹,袁 斌²,盛剑霓²,程发新²

(1. 华中科技大学电气与电子工程学院,湖北武汉 430074;2. 西安交通大学电气工程学院,陕西西安 710049)

摘 要: 本文提出有限元法与新型等效源法的两种新耦合算法. 该耦合法可以使有限元法和新型等效源法在矩形边界上进行耦合,发挥了有限元法与新型等效源法的各自优点,特别适合于求解无界区域各类问题. 用耦合法计算了一轴对称非线性静磁场模型,与有限元法相比,耦合法将会减少未知数的个数,提高计算效率.

关键词: 有限元法; 新型等效源法; 耦合法; 非线性静磁场

中图分类号: TM153 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 12-1646-03

Calculation of the Axisymmetric Field Using Two Kinds of the Coupled Finite Element-New-Type Equivalent Source Method

YAN Zhao-wen¹; LI Lang-ru¹; YUAN Bin²; SHENG Jian-ni²; CHENG Fa-xin²

(1. Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, Hubei 430074, China;

2. Faculty of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

Abstract: Two kinds of the coupled finite element-new-type equivalent source method are systematically illustrated. The coupling of the two methods (FEM and NESM) can enhance the advantages of both techniques and help to overcome their specific weaknesses. The methods are especially adapted to the calculation of open domain problems including nonlinear, anisotropic and stratified media.

Key words: FEM; new-type equivalent source method; coupled method; nonlinear magnetostatic field

1 引言

在传统的电磁场数值分析中,有限元法是应用比较成熟的,特别是处理多种媒质和非线性场十分有效.然而,有限元法也有局限性,比如对求解开域问题,就会遇到困难^[1].有限元法在处理开域问题方面已有多种处理方法,例如逆径变换法^[2]、Trefitz 法,以及有限元-边界元耦合法^[3]、有限元-模拟电荷耦合法^[4].这些方法在有限元解决开域问题方面起到了一定的推动作用,但往往实现起来比较复杂.因此,研究有限元与其它方法的耦合问题仍具有重要的理论价值.

新型等效源法是作者近年提出的计算电磁场的一种新方法^[5,6],其解的表达式为含有一系列本征函数的级数形式.新型等效源法特别适合于求解无限区域的各类线性场问题,因此,如能把新型等效源法与有限元法耦合在一起解决开域问题,将具有一定的实际意义.

本文研究轴对称场的有限元法和新型等效源法的两种耦合新算法,给出耦合法的具体公式和实施方法,并用耦合法计算一实例来说明方法的正确性和有效性.

2 轴对称场的有限元方程

本文以轴对称磁场为例,矢量磁位 A 作为求解对象.

在对轴对称场的分析中,由于矢量磁位 A 只有一个分量,即 $A = A_\phi \rho^0$,所以只要在过 z

对称轴的子午面上用三角形或四边形单元剖分(图 1),然后在以三角形或四边形为截面的旋转体上进行积分就行了.

设有下列第一类、第三类非齐次混合型边值问题

$$\begin{aligned} \nabla^2 A &= -\mu J & V \\ A_\phi &= f_1 & S_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(A_\phi)}{\partial n} = H_1, \quad S_2$$

对式(1)所示的边值问题,在轴对称场情况下其泛函极值问题可描述如下(A_ϕ 以下省略下标 ϕ):

$$F(A) = 2 \int_V \frac{1}{2\mu} B^2 d\tau - 2 \int_{S_1} J A d\tau - 2 \int_{S_2} H_1 A dl = \min \quad (2)$$

如采用四节点四边形剖分单元,则第 e 单元矢量磁位 A 可表示为

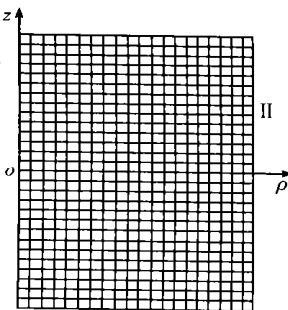


图 1 轴对称场剖分区域

$$A^e = \sum_{i=1}^4 N_i^e A_i^e = N_e A_e \quad (3)$$

式中: N_e 为四边形标准单元的形状函数。

由 $B = \nabla \times A$ 求得磁感应强度 B^e 的两个分量 B^e_r 和 B^e_z , 并代入式(2)中,有

$$F_e(A^e) = \frac{1}{2} A_e^T K_e A_e - A_e^T P_e - A_e^T Q_e H_{1r} = \min \quad (4)$$

式中: K_e 为单元系数阵, P_e 、 Q_e 为四阶列阵, 它们的表示方法和各元素计算公式见参考文献[1]。

求 $F_e(A^e)$ 的极值且进行合成后, 可得一矩阵方程为:

$$KA - QH_{1r} = P \quad (5)$$

上式用分块矩阵表示如下:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{io} & \mathbf{0} \\ K_{oi} & K_{oo} & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{1o} \\ H_{1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A_{1i} 为内部节点矢量磁位值; A_{1o} 为边界节点矢量磁位值。

由上式可见, 用有限元法求解无界区域的场时, H_{1r} 是未知的, 需要特殊处理。如果将有限元区以外的无界空间区域(图1中区域)用新型等效源法求解, 并在区域和区域的分界面上进行耦合, 那么可以提高解的计算精度。本文提出两种耦合法, 分别予以介绍。

3 有限元与新型等效源的耦合方法

设开区域(非导体区)的表面边界为 S , 且不包含外施电流源。则区域中的矢量磁位 A 满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 A = 0 \quad (7)$$

用新型等效源法求解方程(7)时, 新型等效源的设置如图2所示(填充在区域的无效区域(区域)), 为1号球形等效源。这里选用二阶矢量位作为计算对象。根据轴对称场的性质, 二阶矢量位 W_1 (W_2 的解为零)的级数解的表达式为:

$$W_1 = A_0 + \sum_{p=1}^{N_p} \left\{ \frac{A_{op}}{r_{op}} + \sum_{l=1}^{N_{op}} r_{op}^{-(l+1)} [A_{op}^l P_l(\cos \theta_{op})] \right\} \quad (8)$$

方程(7)的解为:

$$A_{2\phi} = -\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sum_{k=1}^N k U_k \quad (9)$$

根据有限元法, 可设:

$$F(A_2) = \frac{1}{2\mu} \int_V (\nabla \times A_2)^2 dv - \int_S H_{2r} \cdot A_2 ds \quad (10)$$

在轴对称场中, 在球坐标系 (r, θ, ϕ) 下得到

$$F(A_{2\phi}) = \frac{1}{2\mu} \int_V \left\{ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_{2\phi})}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(A_{2\phi})}{\partial r} \right]^2 \right\} r^2 \sin \theta dr d\theta - 2 \int_S H_{2r} A_{2\phi} r \sin \theta ds \quad (11)$$

把式(9)代入式(11)得:

$$F(A_{2\phi}) = \frac{2}{2\mu} \int_S \left\{ \int_{k=1}^N \left(\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} U_k + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} \right) \right\}^2 r^2 + \int_{k=1}^N \left(\frac{1}{r} U_k + \frac{\partial U_k}{\partial r} \right) \int r^2 \sin \theta dr d\theta - 2 \int_S H_{2r} \left(\sum_{k=1}^N k U_k \right) r \sin \theta dl \quad (12)$$

令 $\frac{\partial F(A_{2\phi})}{\partial A_{2\phi}} = 0, i = 1, 2, \dots, N$, 得:

$$\frac{2}{\mu} \int_S \left\{ \int_{k=1}^N \left(\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} U_k + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} \right) \right\} \int_{k=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \left(\frac{\cos \theta}{r \sin \theta} U_k + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k}{\partial \theta} \right) \right\} + \int_{k=1}^N \left(\frac{1}{r} U_k + \frac{\partial U_k}{\partial r} \right) \int_{k=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \left(\frac{1}{r} U_k + \frac{\partial U_k}{\partial r} \right) \right\} \int r^2 \sin \theta dr d\theta - 2 \int_S H_{2r} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} U_k \right) r \sin \theta dl = 0 \quad (13)$$

把式(8)代入式(13), 得:

$$\frac{1}{\mu} \int_{k=1}^N \int_S \left\{ \int_{\sin \theta} \frac{\partial P_k(\cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P_k(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \right\} \int_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \frac{1}{r^{k+m+2}} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial P_m(\cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P_m(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right\} + k \frac{\partial P_k(\cos \theta)}{\partial \theta} \int_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \frac{1}{r^{k+m+2} m} \frac{\partial P_m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right\} \int \sin \theta dr d\theta - H_{2r} \int_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \left(-\frac{1}{r^m} \frac{\partial P_m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right\} \sin \theta dl = 0 \quad (14)$$

对上式中 r 进行积分后, 即变成对 θ 的单积分:

$$\frac{1}{\mu} \int_{k=1}^N \int_{\sin \theta} \left\{ \int_{\sin \theta} \frac{\partial P_k(\cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P_k(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \right\} \int_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \frac{1}{(k+m+1) r^{k+m+1}} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial P_m(\cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P_m(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right\} + k \frac{\partial P_k(\cos \theta)}{\partial \theta} \int_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \frac{1}{(k+m+1) r^{k+m+1} m} \frac{\partial P_m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right\} \int \sin \theta d\theta + H_{2r} \int_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{2\phi}} \left(\frac{1}{r^m} \frac{\partial P_m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \right\} \sin \theta dl = 0 \quad (15)$$

上式表示为矩阵方程:

$$R - GH_{2r} = 0 \quad (16)$$

在分界面上选 N 个点, 由式(9)可得每个点的表达式:

$$A_{2\phi} = \sum_{i=1}^N U_{i1} + \sum_{i=2}^N U_{i2} + \dots + \sum_{i=N}^N U_{iN}, i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

上式简化为矩阵形式

$$A_{2\phi} = U \quad (18)$$

上式求逆得, 并代入式(16)可得:

$$ZA_{2\phi} - GH_{2r} = 0 \quad (19)$$

在区域与区域的分界面上, $A_{1o} = A_{2\phi}, H_{1r} = H_{2r}$, 根据方程(6)、(19)可得一联立方程组:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{io} & \mathbf{0} \\ K_{oi} & K_{oo} & -Q \\ \mathbf{0} & Z & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{1o} \\ H_{1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

解此方程组即可求得区域和区域中的场量分布。

4 有限元与新型等效源的耦合方法 II

设开区域(非导体区)的表面边界为 S , 并且不包含外施电流源。则区域中的矢量磁位 A 也满足拉普拉斯方程(7)。

用新型等效源法求解方程(7)时, 为了提高计算精度, 在区域的无效区域增加环形等效源 2、3、...、7, 设置方法如图2所示。根据轴对称场的性质, 1号源产生的二阶矢量位

W_1 (W_2 的解为零) 的解的表达式如式 (8) 所示. 2、3、...、7 号源产生的二阶矢量位 W_{1c} 的解为

$$W_{1c} = \sum_{n=2}^7 \frac{1}{2^{2n}} K(k_n) \quad (21)$$

式中: W_{1c} 为环形等效源所带的总电量; K 为第一类完全椭圆积分; $k_n = \sqrt{\frac{2(0_n)^2 + (z - z_{0n})^2}{z^2}}$; $k_n = \frac{2(0_n)^2}{z^2}$.

方程 (7) 的解为:

$$A_{2\phi} = - \frac{\partial (W_1 + W_{1c})}{\partial z} = \sum_{k=1}^N k U_k \quad (22)$$

在分界面上选 N 个点, 由式 (22) 可得每个点的表达式:

$$A_{2\phi i} = U_{1i} + U_{2i} + \dots + U_{Ni}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

表示为矩阵形式有:

$$\begin{bmatrix} A_{2\phi 1} \\ A_{2\phi 2} \\ \dots \\ A_{2\phi N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1N} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{N1} & U_{N2} & \dots & U_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ N \end{bmatrix} \quad (24)$$

即: $A_{2\phi} = U \quad (25)$

由公式 (22) 可求出这 N 个点的磁场强度的切向分量:

$$H_{2\phi i} = \frac{1}{\mu} \nabla \times A_{2\phi} = \sum_{k=1}^N k V_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (26)$$

利用区域 I 与区域 II 的分界面上 $A_{1o} = A_{2\phi}$, $H_{1t} = H_{2t}$, 可组成如下分块矩阵:

$$\begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{1o} \\ H_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i} \end{bmatrix} \quad (27)$$

把式 (27) 代入式 (6), 可得一矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} C_{ii} & C_i \\ C_i & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

解方程 (28) 求出 A_{1i} 和 H_{1i} , 代入相关公式即可求出两区域中的场量分布.

5 实例计算

求具有铁芯的圆柱线圈周围的磁场分布, 如图 3 所示. 图中 $a = 0.7\text{m}$, $b = 1.4\text{m}$, $a_1 = 1.1\text{m}$, $a_2 = 1.6\text{m}$, 线圈电流密度 $J = 1.0 \times 10^7 \text{A/m}^2$.

这里把铁芯作为非线性媒质处理, 即磁导率 μ_1 不是常数而是磁感应强度 B 的函数. 将整个场域分为两个区域, 铁芯和绕组所在空间作为区域 I, 无界自

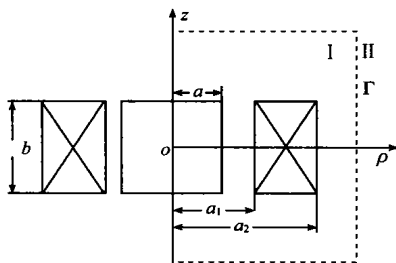


图 3 轴对称非线性磁场计算模型

由空间作为区域 II. 区域 I 用有限元法计算, 区域 II 用新型等效源法计算, 并在两区域的交界面上进行场量耦合.

本文用有限元法和两种耦合法计算的磁场强度沿 $z = 0.7\text{m}$ 时的分布规律, 如图 4 所示. 有限元法、耦合法 I、耦合法 II 未知数的个数分别为 1296、958 和 900, 可见耦合法 I、耦合法

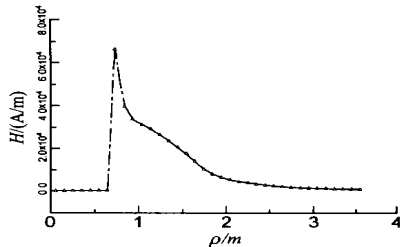


图 4 磁场强度沿 ρ 方向上的分布 ($z = 0.7\text{m}$)

分别节省了 26.08% 和 30.56% 的未知数, 而两种耦合法与有限元法的相对误差均小于 1%.

6 结论

本文提出了有限元法与新型等效源法的两种耦合新算法, 这种方法不受边界形状的限制, 可以求解涉及开域问题的静态场、涡流场、非线性场以及其它含有多种媒质的电磁场问题. 耦合法 I 的实施比耦合法 II 复杂, 但精度比耦合法 II 高. 由于耦合法利用了有限元法和新型等效源法的各自优点, 所以计算开域问题可以节省计算机资源.

参考文献:

- [1] 盛剑霓等. 工程电磁场数值分析 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.
- [2] 钱秀英, 倪光正. 无界空间电磁场数值分析中的有限元法 [J]. 西安交通大学学报, 1988, 22(3): 131 - 137.
- [3] Keli WU, Gilles Y Delisle, Da gang Fang, Michel Lecours. Waveguide discontinuity analysis with a coupled finite-boundary element method [J]. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, 1989, 37(6): 993 - 998.
- [4] 马齐爽, 胡恩球, 邵可然. 用有限元-级数耦合法解轴对称涡流场 [J]. 电工技术学报, 1997, 12(2): 62 - 64.
- [5] 闫照文, 王恒利, 盛剑霓. 基于分域解的新型等效源法 [J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(4): 17 - 20.
- [6] 闫照文, 黄伟, 盛剑霓. 具有旋转对称结构三维电场的新型等效源法 [J]. 高电压技术, 1999, 25(2): 9 - 12.

作者简介:



闫照文 男. 1964 年 12 月生于河南南阳. 1991 年焦作矿业学院本科毕业, 1996 年 7 月获西安矿业学院硕士学位, 1999 年 12 月获西安交通大学博士学位, 现为华中科技大学博士后. 从事电磁场数值计算和涡流无损检测方面的研究工作, 已发表论文十余篇.